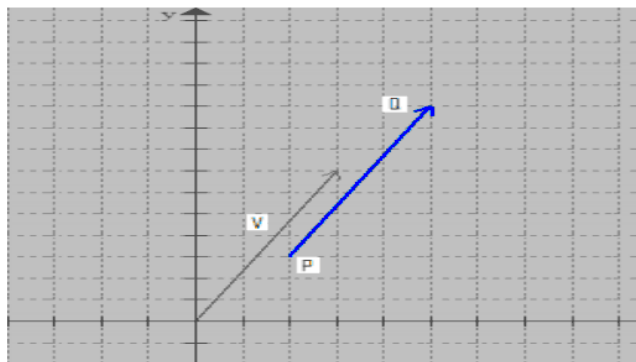


Unidad I: Álgebra de vectores

1.1 Definición de un vector en R2, R3 y su Interpretación geométrica

Ejemplo: El segmento dirigido , donde $P(2,3)$ y $Q(5,10)$, es equivalente al Vector , donde las componentes del vector , se determinan de la siguiente manera:

$$v_1 = q_1 - p_1 = 5 - 2 = 3 \quad v_2 = q_2 - p_2 = 10 - 3 = 7$$



1.2 Introducción a los campos escalares y vectoriales.

Se denomina campo en general, a toda magnitud física cuyo valor depende del punto del plano o del espacio, y del instante que se considere. Si la magnitud definida así en un punto del espacio es escalar, el campo es escalar; si fuera vectorial, sería un campo vectorial.

CAMPO VECTORIAL

Es una asignación de un vector a cada punto en un subconjunto del espacio euclidiano. Un campo de vectores en el plano, por ejemplo, se puede visualizar como una flecha, con una magnitud dada y la dirección, que se adjunta a cada punto del plano. Los campos vectoriales se utilizan a menudo para modelar, por ejemplo, la velocidad y la dirección de un fluido en movimiento a través del

espacio, o la fuerza y la dirección de algunas fuerzas, como la magnética o gravitatoria, la fuerza a medida que cambia de punto a punto.

Los campos vectoriales se puede considerar como la representación de la velocidad de un flujo de movimiento en el espacio, y esta intuición física conduce a nociones tales como la divergencia (que representa la tasa de variación del volumen de un flujo) y la curvatura (que representa la rotación de un flujo).

Un campo vectorial en un dominio en el n -espacio de dimensión euclidiana se puede representar como un vector de función con valores que asocia una n -tupla de números reales a cada punto del dominio. Esta representación de un campo vectorial depende del sistema de coordenadas, y hay una bien definida la ley de transformación al pasar de un sistema de coordenadas a otro. Los campos vectoriales se discuten a menudo sobre subconjuntos abiertos del espacio euclidiano, sino también tener sentido en otros subconjuntos tales como superficies, donde se asocian una flecha tangente a la superficie en cada punto (un vector de la tangente). De manera más general, los campos vectoriales se definen en variedades diferenciables, que son espacios que se ven como el espacio euclidiano en escalas pequeñas, pero pueden tener una estructura más compleja a escalas mayores. En este contexto, un campo vectorial da un vector tangente en cada punto de la variedad (es decir, una sección del fibrado tangente a la variedad los campos vectoriales sobre subconjuntos del espacio euclidiano).

Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$, un campo de vectores se representa mediante un vector de función con valores de $V: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ en la norma coordenadas cartesianas $(x_1, \dots, x_n)$. Si S es un conjunto abierto, entonces V es una función continua, siempre que cada componente de la V es continua, y más en general, V es C^k campo vectorial si cada componente V es k veces continuamente diferenciable.

Un campo vectorial se puede visualizar como una n -dimensional del espacio con un n dimensiones vectores adjunta a cada punto. Dadas dos C^k vectores campos V, W definido en S y un verdadero valor C^k -función f definida sobre S , las dos operaciones de multiplicación y suma de vectores escalares.

Definir el módulo de C^k campos de vectores en el anillo de C^k -funciones.

CAMPOS ESCALARES

Se visualiza mediante las superficies de nivel o isoescalares, que son el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales la función escalar toma el mismo valor, por ejemplo: $T(x, y, z) = \text{cte}$

Cuando estas superficies se cortan por un plano se convierten en las llamadas curvas de nivel o isoescalares, que según la magnitud física que representan reciben un nombre particular: las isotermas se definen por: $T(x, y) = \text{cte}$ las isobaras se definen por: $P(x, y) = \text{cte}$.

Los campos vectoriales representan magnitudes de carácter vectorial: $A(x, y, z, t)$. Entre éstos cabe citar el campo de velocidades en un fluido: $v(x, y, z, t)$, el campo eléctrico, el gravitatorio, el magnético... De manera análoga a los campos escalares, se dice que un campo vectorial es estacionario cuando la magnitud característica del mismo no es función del tiempo, como por ejemplo el gravitatorio: $g(x, y, z)$ y el electrostático: $E(x, y, z)$. Entre los campos vectoriales son especialmente importantes los campos de fuerzas. Se dice que en una cierta región del espacio hay un campo de fuerzas cuando en todo punto de la misma hay una fuerza que toma un valor diferente para cada punto y en cada instante de tiempo. A partir de ahora nos referiremos a los campos estáticos de fuerzas. Se suele definir un campo de fuerzas por unidad de agente sensible que se denomina intensidad del campo de fuerzas:

$$I(x, y, z) = \frac{F(x, y, z, K)}{K}$$

Para los campos gravitatorios:

$$g = \frac{F_g}{m}$$

, y para el electrostático:

$$E = \frac{F_e}{q}$$

1.3 La geometría de las operaciones vectoriales.

Cálculo vectorial (o análisis vectorial) es una rama de las matemáticas relacionadas con la diferenciación y la integración de campos vectoriales, sobre todo en tres dimensiones del espacio euclidiano el término “cálculo vectorial” a veces se utiliza como sinónimo para el tema más amplio de cálculo multivariable, que incluye el cálculo de vectores, así como la diferenciación parcial y la integración múltiple. Cálculo vectorial juega un papel importante en la geometría diferencial y en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Se utiliza ampliamente en la física y la ingeniería, especialmente en la descripción de los campos electromagnéticos, los campos gravitatorios y el flujo de fluidos .

Cálculo vectorial se desarrolló a partir cuaternión análisis por J. Willard Gibbs y Oliver Heaviside cerca del final del siglo 19, y la mayor parte de la notación y la terminología establecida por Gibbs y Edwin Bidwell Wilson en su libro de 1901, Análisis de Vector. En la forma tradicional con productos cruzados, cálculo vectorial no generaliza a dimensiones más altas, mientras que el enfoque alternativo de álgebra geométrica, que utiliza productos de exterior se generaliza, como se analiza más adelante.

Objetos Basicos

Los objetos básicos en cálculo vectorial son campos escalares (las funciones con valores escalares) y campos de vectores (vector con valores de funciones). Estos se combinan o se transforman en diversas operaciones, e integrada. En los tratamientos más avanzados, una más distingue pseudovector campos y pseudoescalar campos, que son idénticos a los campos vectoriales y campos escalares, salvo que cambie de signo en virtud de un inversor de mapa de orientación: por ejemplo, la curvatura de un campo vectorial es un campo pseudovector, y si se reflexiona un campo vectorial, los puntos de curvatura en la dirección opuesta.

1.4 Operaciones con vectores y sus propiedades

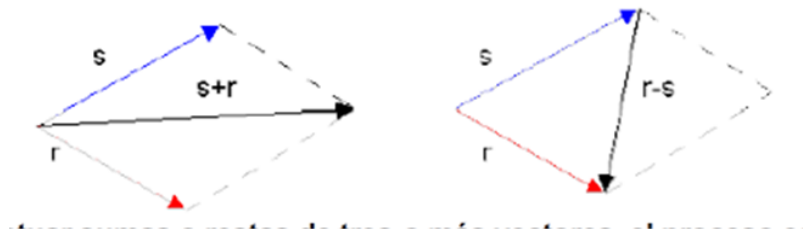
OPERACIONES BÁSICAS CON VECTORES.

Suma y resta de vectores

La suma de dos vectores libres es otro vector libre que se determina de la siguiente forma:

Se sitúa el punto de aplicación de uno de ellos sobre el extremo del otro; el vector suma es el vector que tiene su origen en el origen del primero y su extremo en el extremo del segundo.

Por tanto, el vector suma de dos vectores coincide con una de las diagonales, la “saliente”, del paralelogramo que puede formarse con los vectores que se suman; la otra diagonal representa la resta de dichos vectores.

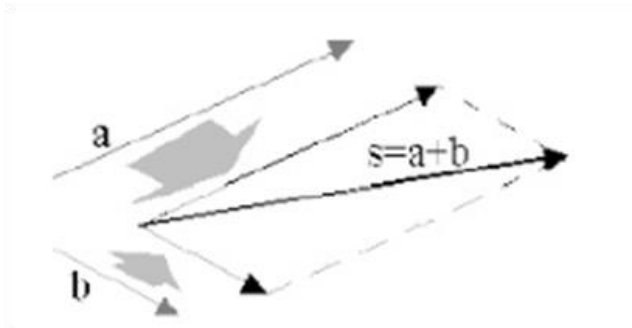


Para efectuar sumas o restas de tres o más vectores, el proceso es idéntico. Basta con aplicar la propiedad asociativa.

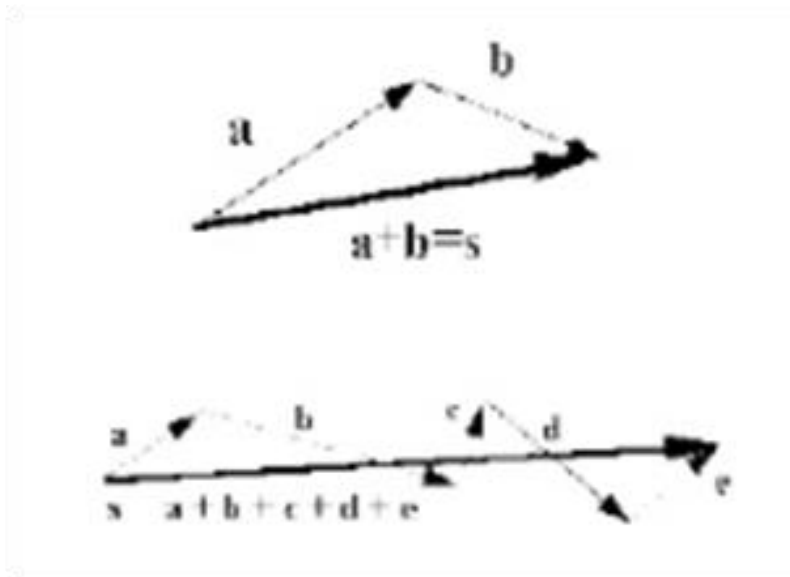
Al vector que se obtiene al sumar o restar varios vectores se le denomina resultante.

PROCEDIMIENTO GRAFICO

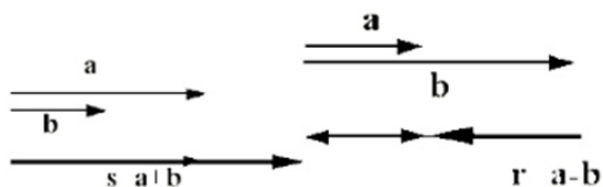
Para sumar dos vectores de manera grafica utilizaremos la denominada Regla del paralelogramo, consiste en trasladar paralelamente los vectores hasta unirlos por el origen, y luego trazar un paralelogramo, del que obtendremos el resultado de la suma, como consecuencia de dibujar la diagonal de ese paralelogramo, como podemos ver en la siguiente imagen:



Otra manera de expresar la suma de manera gráfica es trasladar el segundo vector a sumar de tal manera que el origen de éste, coincida con el extremo del primer vector, y la suma la obtendremos dibujando un vector que vaya desde el origen del primer vector hasta el extremo del segundo, de la siguiente manera:



Hay que tener muy presente lo siguiente: vectores en la misma dirección se suman (tal y como ya hemos visto en la sección de la suma de vectores), pero vectores con sentidos opuestos se restan (tal y como se puede ver en el apartado correspondiente a la resta de vectores). A continuación tenemos un ejemplo de suma y resta de vectores.



METODO ALGEBRAICO PARA LA SUMA DE VECTORES

Dados tres vectores

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$$

La expresión correspondiente al vector suma $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ es:

$$\mathbf{s} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} + b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} - c_x \mathbf{i} - c_y \mathbf{j} - c_z \mathbf{k}$$

O bien

$$\mathbf{s} = (a_x + b_x - c_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y - c_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z - c_z) \mathbf{k}$$

Siendo, por tanto,

$$s_x = a_x + b_x - c_x$$

$$s_y = a_y + b_y - c_y$$

$$s_z = a_z + b_z - c_z$$

1.5 Descomposición vectorial en 3 dimensiones

Un vector euclidiano (a veces llamado geométrico o del vector espacial, o - como aquí - simplemente un vector) es un objeto geométrico que tiene tanto una magnitud (o longitud) y dirección. Un vector euclidiano es frecuentemente representado por un segmento de recta con una dirección definida, o gráficamente como una flecha, la conexión de un punto inicial. A con un punto terminal B.

La magnitud del vector es la distancia entre los dos puntos y la dirección se refiere a la dirección de desplazamiento de una de B. Muchas operaciones algebraicas sobre números reales, tales como adición, sustracción, multiplicación, y la negación han análogos de cierre para los vectores, las operaciones que obedecen a la suma algebraica de las leyes conocidas de la conmutatividad, asociatividad y distributividad. Estas operaciones y las leyes asociadas calificar euclidiana

vectores como un ejemplo del concepto más generalizado de vectores se define simplemente como elementos de un espacio vectorial.

Los vectores juegan un papel importante en la física: la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento y las fuerzas que actúan sobre él son descritos por vectores. Muchas otras magnitudes físicas puede ser útil considerar como vectores. Aunque la mayoría de ellos no representan distancias (como la posición o el desplazamiento), su magnitud y dirección puede ser todavía representada por la longitud y la dirección de una flecha. La representación matemática de un vector físico depende del sistema de coordenadas utilizadas para describirlo. Otros como los objetos del vector que describen las magnitudes físicas y transformar de una manera similar por los cambios del sistema de coordenadas son pseudovectores y tensores.

El término vector también tiene generalizaciones a dimensiones superiores y un enfoque más formal con una aplicación más amplia.

1.6 Ecuaciones de rectas y planos

ECUACIONES DE PLANOS Y RECTAS

Para determinar un plano se necesitan un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{N}(A, B, C)$ normal al plano. La ecuación del plano viene entonces dada por la relación:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad A.x + B.y + C.z + D = 0 \quad (1)$$

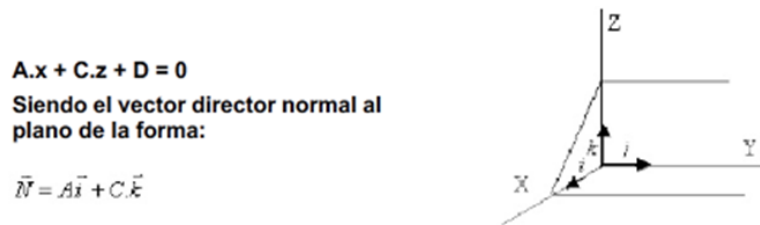
Donde $D = -A.x - B.y - C.z$

Se pueden considerar varios casos particulares según que uno o dos de los coeficientes de la ecuación (1) sean nulos.

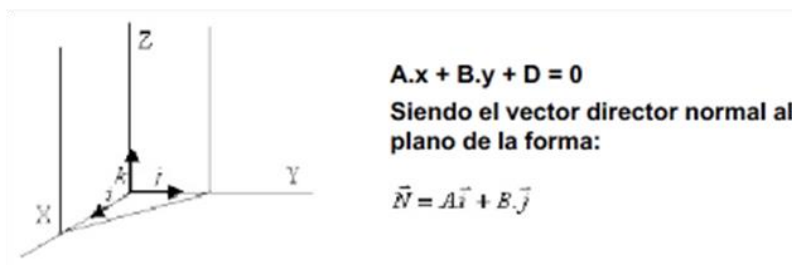
a) Plano paralelo al eje OX. Se tiene $A = 0$ y la ecuación toma la forma:



b) Plano paralelo al eje OY. Se tiene $B = 0$ y la ecuación general toma la forma:



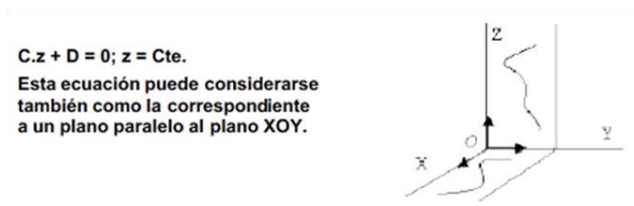
c) Plano paralelo al eje OZ. Se tiene $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:



d) Plano que pasa por el origen. Se tiene $D = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$A.x + B.y + C.z = 0$$

e) Plano perpendicular al eje OZ. Se tiene en este caso $A = 0$, $B = 0$ y la ecuación general toma la forma:



f) Plano perpendicular al eje OY o, lo que es igual, paralelo al plano XOZ. Se tiene en este caso $A = 0$, $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$B \cdot y + D = 0 ; y = \text{Cte}$$

g) Plano perpendicular al eje OX o, lo que es igual, paralelo al plano YOZ. Se tiene en este caso $B = 0$, $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$A \cdot x + D = 0 ; x = \text{Cte}.$$

ECUACIÓN VECTORIAL

Ésta expresa una recta en términos de 2 vectores: el vector posición de un punto cualquiera de la recta $\langle x, y, z \rangle$, y el vector dirección de la recta $\langle a, b, c \rangle$ multiplicado por una constante (en este caso λ). Este último se obtiene fácilmente, con la diferencia de las coordenadas de dos puntos de la misma.

Por ejemplo, para la recta

$$y = 3x + 8$$

si sustituimos los valores de $x=0$ y $x=1$, obtenemos los dos puntos $(0,8)$ y $(1,11)$.

Restando las coordenadas correspondientes de x e y , $11-8 = 3$, $1-0 = 1$. Por lo tanto, el vector dirección de la recta es o $\langle 1,3 \rangle$.

Sabiendo que $(0,8)$ es un punto de la recta, podemos escribir su ecuación vectorial de la siguiente forma:

Generalizado para rectas en 3 dimensiones, la que pasa por los puntos $(3,6,1)$ y $(2,5,8)$, tiene vector dirección $\langle 2-3, 5-6, 8-1 \rangle = \langle -1, -1, 7 \rangle$, y por lo tanto, su ecuación vectorial podría ser.

Con $\lambda = 0$ tenemos el punto $(3,6,1)$, y con $\lambda = 1$ se obtiene el $(2,5,8)$.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Estas podrían considerarse el desarrollo de la ecuación vectorial, ya que representan las coordenadas de un punto de la recta en términos de una variable independiente λ o t .

Siguiendo con el ejemplo anterior, si tenemos la ecuación vectorial sus ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + \lambda(-1) = 3 - \lambda$$

$$y = 6 + \lambda(-1) = 6 - \lambda$$

$$z = 1 + \lambda(7) = 1 + 7\lambda$$

Sustituyendo los mismos valores de lambda que en la ecuación anterior, podemos llegar a los puntos correspondientes.

ECUACIÓN CONTINUA

A estas se llega despejando la variable independiente (λ o t) en las ecuaciones paramétricas, e igualando todas las ecuaciones resultantes. La forma general de la ecuación continua es:

$$(x-x_0)/a=(y-y_0)/b$$

Por lo tanto

Cuando una de las variables no está en términos de la variable independiente (es constante), no se deja en la triple igualación, sino que se coloca aparte, después de un “punto y coma”

Esto significa que en las ecuaciones paramétricas, la variable lambda o t no aparecía en la ecuación de la variable que queda aparte, y por lo tanto, que el vector dirección tiene un componente cero en esa posición.

Para esa última recta, las ecuaciones paramétricas serían

$$x = 5\lambda - 4$$

$$y = 15\lambda + 7$$

$$z = 5$$

Y la ecuación vectorial: xxx

ECUACIONES DE RECTA

Recordemos que la derivada representa el valor de la recta tangente, el cual posee una dimensión y contienen varios puntos hasta el infinito. Cuando trabajamos en 3D(3 dimensiones) las ecuaciones de recta son las siguientes:

ECUACIÓN VECTORIAL

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$

donde:
 $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$
 $\vec{v}$ es cualquier vector.

ECUACIÓN PARAMÉTRICA
 Sea:
 $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$

$$\vec{r} = \langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$

Nos queda una igualdad de vectores (ternas), y sabemos que para que sean iguales cada componente debe de ser igual, por lo tanto al igualar los componentes nos quedan las ecuaciones paramétricas de la recta en 3 dimensiones.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + at \\ y(t) &= y_0 + bt \\ z(t) &= z_0 + ct \end{aligned}$$

Despejando t de las ecuaciones Paramétricas, podemos igualar todas las ecuaciones resultantes obteniendo así las Ecuaciones Simétricas.

1.7 Aplicaciones físicas y geométricas

APLICACIÓN: ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Producto Escalar.

El producto escalar de dos vectores es por definición un escalar.

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\theta)$$

propiedades:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$$

podemos usar ahora el producto escalar para encontrar el ángulo de los vectores

a y b:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos(\theta)$$

con lo que deducimos que:

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \cos(\theta)$$

-El coseno da siempre entre 0 y 1

-El producto escalar varía como máximo entre el $|a| \cdot |b|$ y 0

-El coseno nos dice si los vectores son paralelos o perpendiculares

Si coseno de a y b = 0 – vectores perpendiculares

Si coseno de a y b < > 0 – vectores perpendiculares

En este caso, $a \cdot b = 0$, podemos sacar como conclusión que $a=0$ o $b=0$, o bien que a y b son mutuamente perpendiculares.

MODULO DE UN VECTOR

Un vector no solo nos da una dirección y un sentido, sino también una magnitud se le denomina módulo.

Gráficamente: es la distancia que existe entre su origen y su extremo, y se representa por: $|a|$.

Coordenadas cartesianas: en muchas ocasiones es conveniente tomar las componentes sobre tres direcciones mutuamente perpendiculares OX, OY, y OZ que forman un sistema cartesiano tridimensional.

Si tomamos tres vectores unitarios, i sobre OX, j sobre OY y k sobre OZ, entonces

podemos encontrar puntos a_x , a_y , a_z sobre OX, OY, OZ, respectivamente tales que:

